# Cebir II Final Cevap Anahtarı



1- a) $0_R + 0_R \cdot a \in M$ olup $M \neq \emptyset$ dir.

- $\forall m_1 + r_1 a, m_2 + r_2 a \in M$ $(m_1, m_2 \in I,\ r_1, r_2 \in R)$ için

$(m_1 + r_1 a) - (m_2 + r_2 a) = (m_1 - m_2) + (r_1 - r_2) a \in M$

- $\forall r \in R$ $\forall m + sa \in M$ için $r(m + sa) = rm + r(sa)$

$= rm + (rs)a \in M$

olup ayrıca $R$ değişmeli olduğundan $M$, $R$'nin idealidir.

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in R$ için $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$

olmalı $\begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ olmalı $a^2 = a \wedge 2ab = b$

olmalı o halde

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ idempotenttir.

2- a) $f(x) = 7x^4 + 28x^3 + 67x^2 + 63x + 27 \Rightarrow$

$f(x-1) = 7x^4 + 25x^2 - 15x + 10$ olup

$p = 5$ için Eisenstein kriteri uygulanırsa asaldır.

b) $f(x) = x^5 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ için

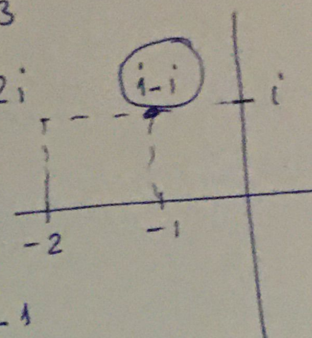
$f(\bar{0}) \neq \bar{0}$, $f(\bar{1}) \neq \bar{0}$ olup lineer çarpan içermez.

O halde asal değilse biri 2. diğeri 3. dereceden iki asal polinomun çarpımı olarak yazılabilir. $\mathbb{Z}_2[x]$ 2. dereceden polinomlar $x^2, x^2 + \bar{1}, x^2 + x, x^2 + x + \bar{1}$ olup sadece $x^2 + x + \bar{1}$ polinomu asaldır. $x^2 + x + \bar{1} \nmid f(x)$ olduğundan $f(x)$, $\mathbb{Z}_2[x]$ asaldır. $\mathbb{Z}_2$ cisim $\mathbb{Z}_2[x]$ TİB olup burada asal ile maksimal idealler çakışır. O halde $\mathbb{Z}_2[x] / (f(x))$ cisimdir.

3— a) ~~13+19i~~ = ~~(1+i)(1+2i)(2+7i)~~ bulunur.

$19-13i = (1+i)(2+i)(-2-7i)$ ''

b) $\dfrac{2+11i}{2-7i} = \dfrac{-73}{53} + \dfrac{36}{53}i$



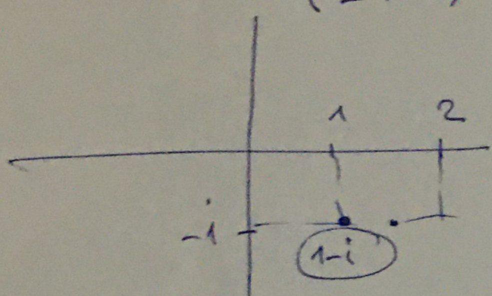

$2+11i = (-1+i)(2-7i) - 3+2i$

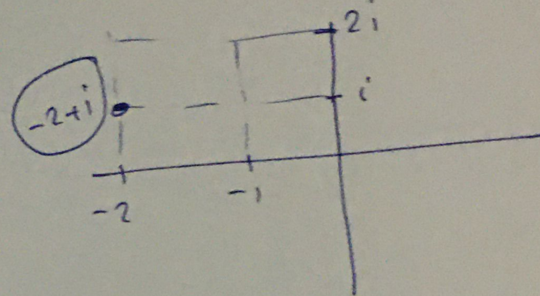
$2-7i = (-2+i)(-3+2i) - 2$

$-3+2i = (1-i)(-2) - 1$

$-2 = 2.(-1) + 0$

$(2+11i, 2-7i) = -1$




4— R, TİB olduğundan burada asal ve maksimal idealler çakışır. O halde I ve J maksimal idealdir.

$I.J \subset I \wedge I.J \subset J \Rightarrow I.J \subset I \cap J$ *

Önce $I+J=R$ olduğunu gösterelim.

$I \neq J$ olduğundan $I \subset I+J \Rightarrow I \neq I+J \Rightarrow$ I maksimal olduğundan $I+J=R$ dir.

$x \in I \cap J \Rightarrow I+J=R$ olduğundan $1=a+b$ olacak şekilde $a \in I$, $b \in J$ vardır.

$x = xa + xb$ $\quad xa \in (I \cap J).I \subseteq J.I = I.J$ ve $xb \in (I \cap J).J \subset I.J$ olup $xa, xb \in I.J$ dir. $I.J$ ideal olduğundan $xa+xb = x \in I.J$

$\Rightarrow I \cap J \subset I.J$ ** $\quad I.J = I \cap J$ bulunur.

5– a) $\mathbb{Z}_{20}[x]$ ile $\mathbb{Z}_{20}$ halkasının birimselleri aynı olup bunlar

$\mathbb{Z}_{20}^{*}=\{\bar{1},\bar{3},\bar{7},\bar{9},\overline{11},\overline{13},\overline{17},\overline{19}\}$ dir.

b) $f: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$\quad \bar{\bar{a}} \longrightarrow f(\bar{\bar{a}})=(\bar{a},\tilde{a})$

$f(\mathbb{Z}_6)=\{(\bar{0},\tilde{0}),(\bar{1},\tilde{1}),(\bar{0},\tilde{2}),(\bar{1},\tilde{0}),(\bar{0},\tilde{1}),(\bar{1},\tilde{2})\}$

$\text{Çek} f=\{\bar{\bar{a}}\in\mathbb{Z}_6 \mid f(\bar{\bar{a}})=(\bar{0},\tilde{0})\}$

$=\{\bar{\bar{a}}\in\mathbb{Z}_6 \mid (\bar{a},\tilde{a})=(\bar{0},\tilde{0})\}$

$=\{\bar{\bar{a}}\in\mathbb{Z}_6 \mid \bar{a}=\bar{0},\ \tilde{a}=\tilde{0}\}$

$=\{\bar{\bar{a}}\in\mathbb{Z}_6 \mid 2|a \wedge 3|a\}$

$=\{\bar{\bar{a}}\in\mathbb{Z}_6 \mid 6|a\}=\{\bar{0}\}$ dir.